問題

実数 a,b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ とおく。

(1) $a\neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2) (1)で求めた c について，a,b が条件 $a<c<b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を a,b を用いて表せ。

(3) 一般に $a<b$ のとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 (a,b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

（2012 北海道大学）

解法のコツ

・月並みだけど，グラフで表し，具体的に考えやすくする。

・必要十分問題では，「・・・①」とするより，「・・・必要条件①」と表すほうが，必要条件の包含関係について検討する上で便利である。

解

(1)

$f(c)=g(c)$ より，$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a$　$\therefore (2c+1)(b-a)=0$

$a\neq b$ より，$c=-\dfrac{1}{2}$　・・・(答)

(2)

$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$ より，$f(x)<0$ を満たす x が存在するための必要条件は，

$f(a)=-a^2+b<0$　$\therefore b<a^2$　・・・必要条件①

$g(x)=(x-b)^2-b^2+a$ より，$g(x)<0$ を満たす x が存在するための必要条件は，

$g(b)=-b^2+a<0$　$\therefore a<b^2$　・・・必要条件②

さらに，①かつ②が成り立っているとき，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+b+\dfrac{1}{4}\geq 0$ とすると，

$a<-\dfrac{1}{2}<b$，$f(a)<0\leq f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\geq 0>g(b)$ となるから

$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ を満たす解が存在しない。

よって，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+b+\dfrac{1}{4}<0$ であること，

すなわち $b<-a-\dfrac{1}{4}$　・・・必要条件③　であることが必要である。

ここで，必要条件②が成り立つことは $a<-\dfrac{1}{2}$，$b^2\geq 0$ により保証される。

また，必要条件①と必要条件③については，

$a^2-\left(-a-\dfrac{1}{4}\right)=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2>0$　$\left(\because a<-\dfrac{1}{2}\right)$ より，$b<-a-\dfrac{1}{4}<a^2$

以上より，必要条件は $b<-a-\dfrac{1}{4}$

また，$b<-a-\dfrac{1}{4}$ ならば，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+b+\dfrac{1}{4}<0$ より，

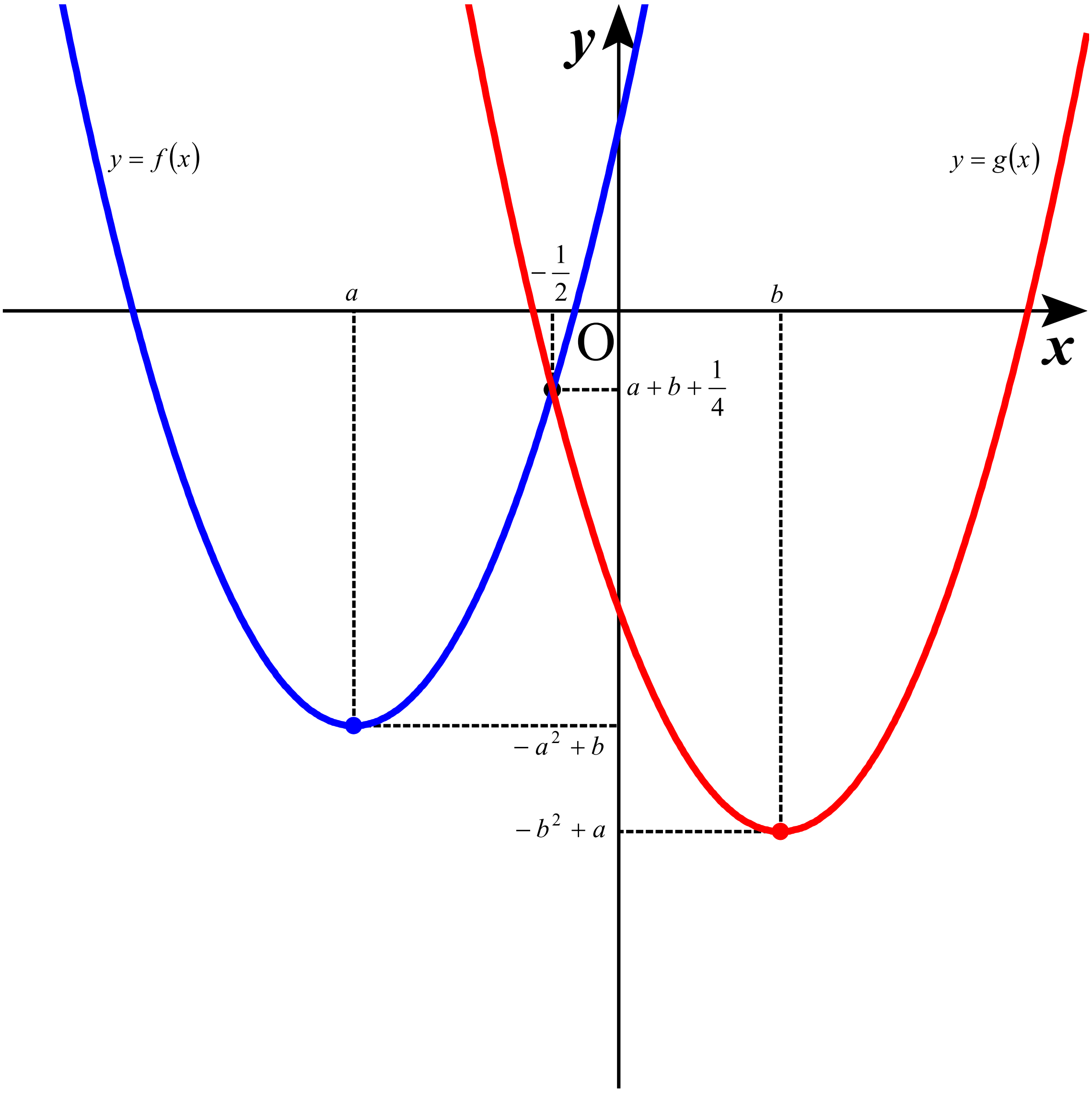
$x=-\dfrac{1}{2}$ は $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ の解となる。

よって，$b<-a-\dfrac{1}{4}$ は $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための十分条件である。

以上より，

$b<-a-\dfrac{1}{4}$ であることは，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件である。

グラフにすると，たとえば，こんな状況



(3)

(ⅰ) $a<-\frac{1}{2}<b$ のとき

(2)より，$b<-a-\frac{1}{4}$

(ⅱ) $-\frac{1}{2}\leq a<b$ のとき

$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$ より，$f(x)<0$ を満たす x が存在するための必要条件は，
$f(a)=-a^2+b<0$ ・・・必要条件③
$g(x)=(x-b)^2-b^2+a$ より，$g(x)<0$ を満たす x が存在するための必要条件は，
$g(b)=-b^2+a<0$ ・・・必要条件④
これと

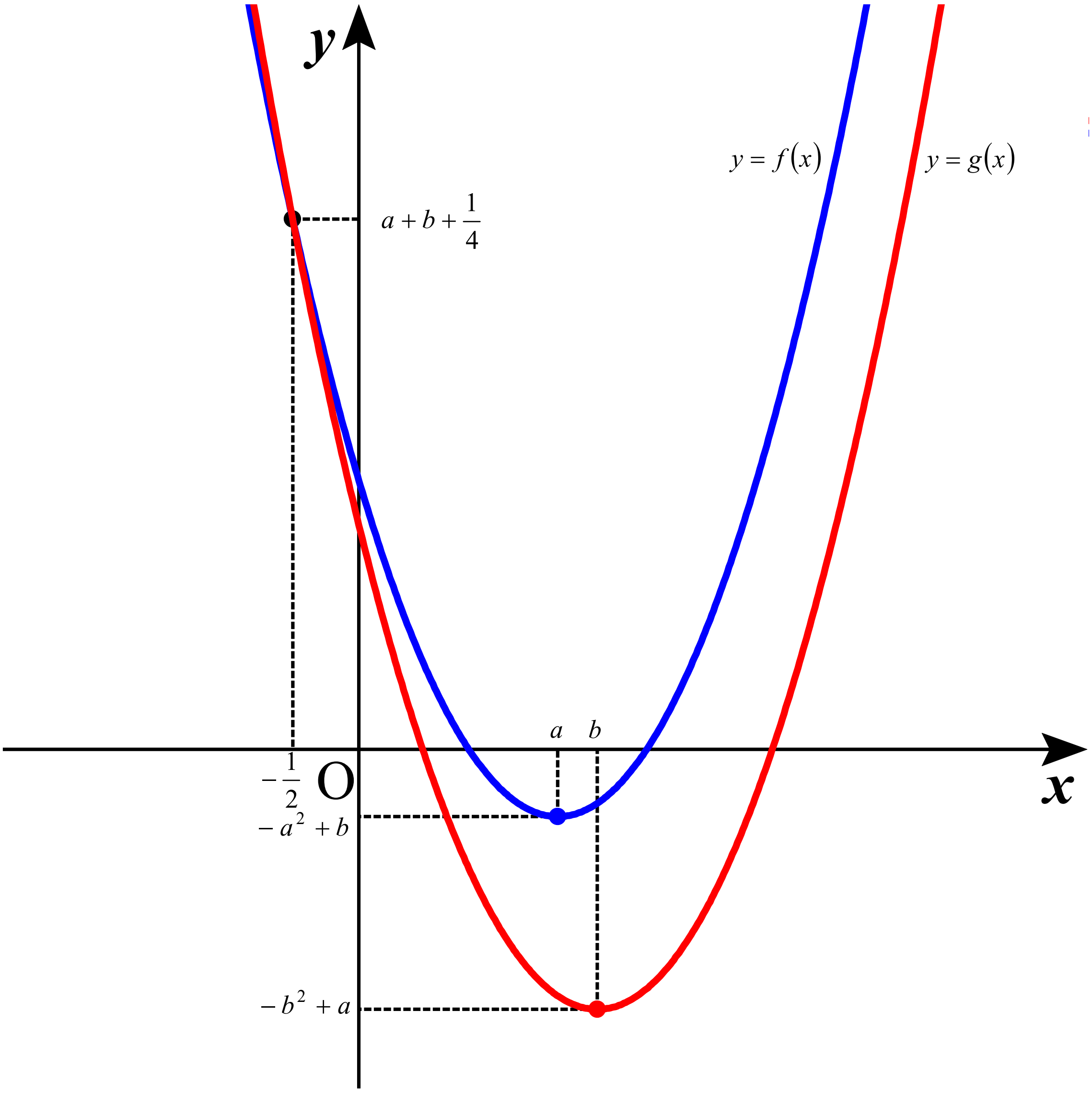
$$
\begin{aligned}
g(b)-f(a)&=-b^2+a-\left(-a^2+b\right)\\
&=a^2-b^2+a-b\\
&=(a-b)(a+b+1)\\
&=(a-b)\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(b+\frac{1}{2}\right)\right\}\\
&<0
\end{aligned}
$$

より，
必要条件③は必要条件④を満たす。
よって，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要条件は，$-a^2+b<0$ である。
また，このとき，

$$
\begin{aligned}
f(a)-g(a)&=-a^2+b-\left(a^2-2ab+a\right)\\
&=-2a^2+2ab+b-a\\
&=2a(b-a)+b-a\\
&=(b-a)(2a+1)\\
&=2(b-a)\left(a+\frac{1}{2}\right)\\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

より，$g(a)\leq f(a)=-a^2+b<0$
したがって，$x=a$ は $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ の解である。
ゆえに，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件は，$-a^2+b<0$ である。

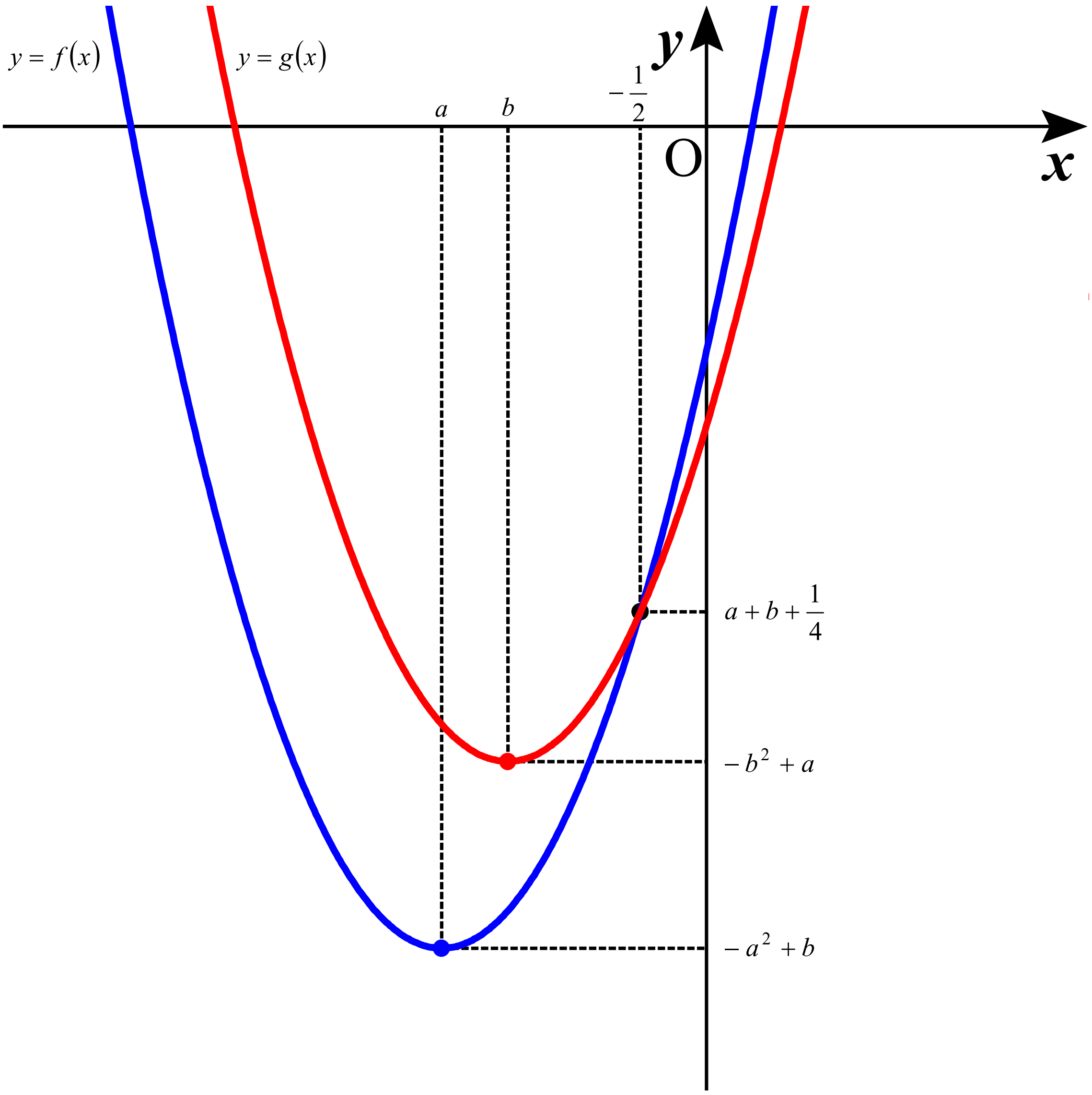
グラフにすると，たとえば，こんな状況



(ⅲ) $a < b \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき

(ⅱ)と同様にして，必要十分条件は，$-b^2 + a < 0$

グラフにすると，たとえば，こんな状況



(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より，

「$a<-\frac{1}{2}<b$ かつ $b<-a-\frac{1}{4}$」または「$-\frac{1}{2}\leq a<b$ かつ $b<a^2$」または「$a<b\leq-\frac{1}{2}$ かつ $a<b^2$」

これを図示すると，下図のようになる。

ただし，破線部は含まない。